簡約化MHD方程式, ドリフト波方程式の導出

沼田 龍介
The Australian National University

平成18年6月13日

1 Low β Tokamak Ordering

アスペクト比の逆数を微小パラメータ (ϵ) としてオーダリングすることにより、トロイダル効果を無視した簡約化 MHD 方程式を導出することができる (スラブモデル)[1]。

理想 MHD 方程式は以下であたえられる。

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho[\partial_t \boldsymbol{V} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}] = -\nabla p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}, \tag{2}$$

$$\partial_t \boldsymbol{B} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}), \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{5}$$

一様な平衡トロイダル磁場を z 方向にとり、以下のオーダリングを考える、

$$\begin{aligned} &\partial_t \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad \nabla_\perp \sim \mathcal{O}(1), \quad \partial_z \sim \mathcal{O}(\epsilon), \\ &B_{z0} + B_z \sim \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \boldsymbol{B}_\perp \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad \boldsymbol{V}_\perp \sim \mathcal{O}(\epsilon), \\ &\rho \sim \mathcal{O}(1), \quad p \sim \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{6}$$

以下の導出において、必要があれば ϵ を明示して、オーダを明確にする。

運動方程式 (2) の平行成分をみると、

$$\rho[\partial_t V_z + (\boldsymbol{V}_\perp \cdot \nabla_\perp)V_z + V_z \partial_z V_z] = -\partial_z p \sim \mathcal{C}(\epsilon^3). \tag{7}$$

よって $V_z \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$ であり、その時、

$$\rho[\partial_t V_z + (\boldsymbol{V}_\perp \cdot \nabla_\perp)V_z] = -\partial_z p. \tag{8}$$

磁場の発散はゼロであることから、ポロイダルフラックス ψ を用いて

$$\boldsymbol{B} = \nabla_\perp \epsilon\psi \times \boldsymbol{e}_z + (B_{z0} + \epsilon^2 B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{9}$$

と表すことができる。(5) に代入すると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \epsilon \partial_z \epsilon^2 B_z \sim \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{10}$$

となる。磁場の回転をとると

$$\begin{aligned}\mu_0 \boldsymbol{j} &= (\nabla_\perp + \epsilon \boldsymbol{e}_z \partial_z) \times (\nabla_\perp \epsilon \psi \times \boldsymbol{e}_z + \epsilon^2 B_z \boldsymbol{e}_z) \\ &= -\epsilon \nabla_\perp^2 \psi \boldsymbol{e}_z + \epsilon^2 \partial_z \nabla_\perp \psi + \epsilon^2 \nabla_\perp B_z \times \boldsymbol{e}_z. \end{aligned} \tag{11}$$

よって

$$j_z = -\frac{1}{\mu_0} \nabla_\perp^2 \psi \sim \mathcal{O}(\epsilon), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{j}_\perp = \frac{1}{\mu_0} (\partial_z \nabla_\perp \psi + \nabla_\perp B_z \times \boldsymbol{e}_z) \sim \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{13}$$

誘導方程式 (3) はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ ($\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$) を用いて

$$\partial_t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} + \nabla \chi \tag{14}$$

と表すことができる。ただし、χ はゲージポテンシャルである。トロイダル磁場の変動成分 $B_z = (\nabla_\perp \times \boldsymbol{A}_\perp) \cdot \boldsymbol{e}_z$ より、$\boldsymbol{A}_\perp \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$。(14) の直交成分をみると

$$\begin{aligned}\epsilon \partial_t \epsilon^2 \boldsymbol{A}_\perp \times \boldsymbol{e}_z &= (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{e}_z + \nabla_\perp \chi \times \boldsymbol{e}_z \\ &= \epsilon \boldsymbol{B}_\perp \epsilon^2 V_z - \epsilon \boldsymbol{V}_\perp (B_{z0} + \epsilon^2 B_z) + \nabla_\perp \chi \times \boldsymbol{e}_z. \end{aligned} \tag{15}$$

よって $\chi \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ であり、

$$\boldsymbol{V}_\perp = \nabla_\perp \frac{\chi}{B_{z0}} \times \boldsymbol{e}_z = \nabla_\perp \varphi \times \boldsymbol{e}_z. \tag{16}$$

ただし、流れ関数を $\varphi \equiv \chi / B_{z0}$ で定義した。ここで、χ には z の任意関数だけの任意性が許されていることに注意。$\chi = B_{z0}\varphi + \chi'(z)$ とおける (物理的には $\partial_z \chi$ が外部から印加された電場に相当する)。$\varphi \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ である。この時、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \epsilon \partial_z \epsilon^2 V_z \sim \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{17}$$

であり、一様な強いトロイダル磁場によって流れは非圧縮になっている。

連続の式 (1) より

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{18}$$

ただし、$\mathrm{d}/\mathrm{d}t \equiv \partial/\partial t + \boldsymbol{V}_\perp \cdot \nabla_\perp$ で与えられる対流微分である (トロイダル方向の微分は $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ であり無視される)。以下、簡単のため ρ は一様であるとする。

(14) の平行成分を計算する。

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{e}_z = (\nabla_\perp A_\parallel - \partial_z \boldsymbol{A}_\perp) \times \boldsymbol{e}_z \tag{19}$$

より、$A_\parallel = \psi + \mathcal{O}(\epsilon^2)$。よって、

$$\begin{aligned}\epsilon \partial_t \epsilon \psi &= (\epsilon \nabla_\perp \varphi \times \boldsymbol{e}_z + \epsilon^2 V_z \boldsymbol{e}_z) \times (\epsilon \nabla_\perp \psi \times \boldsymbol{e}_z + (B_{z0} + \epsilon^2 B_z) \boldsymbol{e}_z) \cdot \boldsymbol{e}_z + \epsilon \partial_z (B_{z0} \epsilon \varphi + \chi') \\ &= \epsilon^2 (\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{e}_z + \epsilon^2 B_{z0} \partial_z \varphi + \partial_z \chi'. \end{aligned} \tag{20}$$

ただし、両辺のオーダリングから $\chi' \sim \mathcal{O}(\epsilon)$。よって

$$\partial_t \psi = (\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{e}_z + B_{z0} \partial_z \varphi + \partial_z \chi'. \tag{21}$$

または、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{e}_z &= [\boldsymbol{V}\times(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_z+(B_{z0}+B_z)\boldsymbol{e}_z)]\cdot\boldsymbol{e}_z \\
&= [\nabla_\perp\psi(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_z)-\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp\psi)]\cdot\boldsymbol{e}_z=-(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\psi \qquad (22)\\
&= [(\nabla_\perp\varphi\times\boldsymbol{e}_z+V_z\boldsymbol{e}_z)\times\boldsymbol{B}]\cdot\boldsymbol{e}_z \\
&= [\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp\varphi)-\nabla_\perp\varphi(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_z)]\cdot\boldsymbol{e}_z=(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp)\varphi \qquad (23)
\end{aligned}
$$

より

$$
\partial_t\psi=(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp)\varphi+B_z\partial_z\varphi+\partial_z\chi'=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\varphi+\partial_z\chi' \qquad (24)
$$

$$
\partial_t\psi+(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\psi=B_{z0}\partial_z\varphi+\partial_z\chi'. \qquad (25)
$$

ただし、$\boldsymbol{B}\cdot\nabla=\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp+B_{z0}\partial_z$ であり、トロイダル磁場の変動成分は含んでいない。

次に、運動方程式 (2) の直交成分を考える。

$$
\begin{aligned}
\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} &= (-\epsilon\nabla_\perp^2\psi\boldsymbol{e}_z+\epsilon^2\partial_z\nabla_\perp\psi+\epsilon^2\nabla_\perp B_z\times\boldsymbol{e}_z)\times(\epsilon\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_z+(B_{z0}+\epsilon^2B_z)\boldsymbol{e}_z) \\
&= (\epsilon^2\partial_z\nabla_\perp\psi+\epsilon^2\nabla_\perp B_z\times\boldsymbol{e}_z)\times(\epsilon\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_z)+(-\epsilon\nabla_\perp^2\psi\boldsymbol{e}_z)\times(\epsilon\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_z) \\
&+ (\epsilon^2\partial_z\nabla_\perp\psi+\epsilon^2\nabla_\perp B_z\times\boldsymbol{e}_z)\times(B_{z0}+\epsilon^2B_z)\boldsymbol{e}_z \\
&= \epsilon^3(-\frac{1}{2}\partial_z|\nabla_\perp\psi|^2+(\nabla_\perp B_z\times\nabla_\perp\psi)\cdot\boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{e}_z \\
&\quad -\epsilon^2\nabla_\perp^2\psi\nabla_\perp\psi+\epsilon^2(B_{z0}+\epsilon^2B_z)\partial_z\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_z-\epsilon^2(B_{z0}+\epsilon^2B_z)\nabla_\perp B_z \qquad (26)
\end{aligned}
$$

を、運動方程式 (2) の直交成分に代入し、最高次数 (ϵ^2) のみ書き下すと、

$$
\begin{aligned}
\rho[\partial_t\boldsymbol{V}_\perp+(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\boldsymbol{V}_\perp] &= -\frac{1}{\mu_0}\nabla_\perp^2\psi\nabla_\perp\psi+\frac{1}{\mu_0}B_{z0}\partial_z\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_z-\frac{1}{\mu_0}B_{z0}\nabla_\perp B_z-\nabla_\perp p \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\nabla_\perp^2\psi\nabla_\perp\psi+\frac{1}{\mu_0}B_{z0}\partial_z\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_z-\nabla_\perp(\frac{1}{\mu_0}B_{z0}B_z+p). \qquad (27)
\end{aligned}
$$

運動方程式の回転をとり渦度方程式の形にすると、圧力およびトロイダル磁場の変動成分の寄与を落とすことができる。渦度の z 成分は

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_z &= (\nabla_\perp+\epsilon\boldsymbol{e}_z\partial_z)\times(\epsilon\boldsymbol{V}_\perp+\epsilon^2V_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_z \\
&= (\epsilon\nabla_\perp\times\boldsymbol{V}_\perp+\epsilon^2\boldsymbol{e}_z\times\partial_z\boldsymbol{V}_\perp+\epsilon^3\nabla_\perp V_z\times\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_z \\
&= -\epsilon\nabla_\perp^2\varphi\boldsymbol{e}_z \qquad (28)
\end{aligned}
$$

となる。また移流項は $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\nabla(\frac{1}{2}V^2)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$ より、回転をとって z 成分を計算すると

$$
\begin{aligned}
\nabla\times[(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\boldsymbol{V}_\perp]\cdot\boldsymbol{e}_z &= -[\nabla\times(\boldsymbol{V}_\perp\times(\nabla_\perp\times\boldsymbol{V}_\perp))]\cdot\boldsymbol{e}_z=(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)(\nabla_\perp\times\boldsymbol{V}_\perp)\cdot\boldsymbol{e}_z \\
&= -(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\nabla_\perp^2\varphi. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

一方、ローレンツ力による項も同様に回転をとって z 成分を計算すると、

$$
\begin{aligned}
[\nabla\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})]\cdot\boldsymbol{e}_z &= (\epsilon(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp)+\epsilon(B_{z0}+\epsilon^2B_z)\partial_z)\epsilon j_z-\epsilon^2(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)\epsilon^2B_z \\
&= -[\epsilon^2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)+\epsilon^3B_z\partial_z]\frac{1}{\mu_0}\nabla_\perp^2\psi+\epsilon^4(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)B_z \qquad (30)
\end{aligned}
$$

以上から渦度方程式の z 成分の最高次数 (ϵ^2) は

$$-\rho\partial_t\nabla_\perp^2\varphi - \rho(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\nabla_\perp^2\varphi = -(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\frac{1}{\mu_0}\nabla_\perp^2\psi. \tag{31}$$

整理すると

$$\partial_t\nabla_\perp^2\varphi = -(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\nabla_\perp^2\varphi + \frac{1}{\mu_0\rho}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\nabla_\perp^2\psi \tag{32}$$

を得る。

また運動方程式の発散を計算することにより、圧力を求めることができる。運動方程式 (2) の発散をとり、流れの非圧縮性を用いると、

$$\nabla^2 p = -\rho\nabla\cdot[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}] + \nabla\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}). \tag{33}$$

右辺第 1 項より

$$\begin{aligned}
-\nabla\cdot[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}] &= -\nabla\cdot\left[\nabla\left(\frac{1}{2}V^2\right) - \boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})\right] = -\nabla^2\left(\frac{V^2}{2}\right) + \nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})) \\
&= -\nabla^2\left(\frac{V^2}{2}\right) + |\nabla\times\boldsymbol{V}|^2 - \boldsymbol{V}\cdot\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V}).
\end{aligned} \tag{34}$$

各項を計算すると、

$$\begin{aligned}
\nabla^2 V^2 &= (\nabla_\perp^2 + \epsilon^2\partial_z^2)(\epsilon^2|\nabla_\perp\varphi|^2 + \epsilon^4 V_z^2) \\
&= \epsilon^2\nabla_\perp^2|\nabla_\perp\varphi|^2 + \epsilon^4\partial_z^2|\nabla_\perp\varphi|^2 + \epsilon^4\nabla_\perp^2 V_z^2 + \epsilon^6\partial_z^2 V_z^2,
\end{aligned} \tag{35}$$

$$|\nabla\times\boldsymbol{V}|^2 = \epsilon^2(\nabla_\perp^2\varphi)^2 + \epsilon^4|\nabla_\perp V_z - \partial_z\boldsymbol{V}_\perp|^2, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) &= (\nabla_\perp + \epsilon\boldsymbol{e}_z\partial_z)\times(-\epsilon\nabla_\perp^2\varphi\boldsymbol{e}_z + \epsilon^2(\nabla_\perp V_z - \partial_z\boldsymbol{V}_\perp)\times\boldsymbol{e}_z) \\
&= -\epsilon\nabla_\perp\nabla_\perp^2\varphi\times\boldsymbol{e}_z + \epsilon^2\nabla_\perp\times((\nabla_\perp V_z - \partial_z\boldsymbol{V}_\perp)\times\boldsymbol{e}_z) \\
&\quad +\epsilon^3\boldsymbol{e}_z\partial_z\times((\nabla_\perp V_z - \partial_z\boldsymbol{V}_\perp)\times\boldsymbol{e}_z) \\
&= -\epsilon\nabla_\perp\nabla_\perp^2\varphi\times\boldsymbol{e}_z - \epsilon^2\boldsymbol{e}_z(\nabla_\perp\cdot(\nabla_\perp V_z - \partial_z\boldsymbol{V}_\perp)) \\
&\quad +\epsilon^3\partial_z(\nabla_\perp V_z - \partial_z\boldsymbol{V}_\perp) \\
&= -\epsilon\nabla_\perp\nabla^2\varphi\times\boldsymbol{e}_z - \epsilon^2\nabla_\perp^2 V_z\boldsymbol{e}_z + \epsilon^3\nabla_\perp\partial_z V_z \\
&= -\epsilon\nabla_\perp\nabla^2\varphi\times\boldsymbol{e}_z - \epsilon^2\nabla^2 V_z\boldsymbol{e}_z + \epsilon^3\nabla_\perp\partial_z V_z + \epsilon^3\partial_z^2 V_z\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned} \tag{37}$$

右辺第 3 項、4 項は非圧縮性が ϵ の 2 次のオーダまでしか満たされていないことに起因している。実際 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) - \nabla^2\boldsymbol{V}$ で、

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) = \nabla_\perp(\partial_z V_z) + \partial_z^2 V_z\boldsymbol{e}_z. \tag{38}$$

ただし、$\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{V}_\perp = 0$ を用いた。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}\cdot\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) &= (\epsilon\nabla_\perp\varphi\times\boldsymbol{e}_z + \epsilon^2 V_z\nabla z) \\
&\quad \cdot(-\epsilon\nabla_\perp\nabla^2\varphi\times\boldsymbol{e}_z - \epsilon^2\nabla^2 V_z\boldsymbol{e}_z + \epsilon^3\nabla_\perp\partial_z V_z + \epsilon^3\partial_z^2 V_z\boldsymbol{e}_z) \\
&= -\epsilon^2|\nabla_\perp\varphi|\cdot|\nabla^2\nabla_\perp\varphi| + \epsilon^4(\nabla_\perp\varphi\times\nabla_\perp(\partial_z V_z))\cdot\boldsymbol{e}_z \\
&\quad -\epsilon^4 V_z\nabla^2 V_z + \epsilon^5 V_z\partial_z^2 V_z.
\end{aligned} \tag{39}$$

同様にして、(33) の右辺第 2 項を計算する。

$$\mu_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B})) - |\nabla \times \boldsymbol{B}|^2, \tag{40}$$

$$|\nabla \times \boldsymbol{B}|^2 = \epsilon^2 (\nabla_\perp \psi)^2 + \epsilon^4 |\nabla_\perp B_z - \partial_z \boldsymbol{B}_\perp|^2, \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \quad &= \quad -\epsilon^2 |\nabla_\perp \psi| \cdot |\nabla^2 \nabla_\perp \psi| + \epsilon^4 (\nabla_\perp \psi \times \nabla_\perp (\partial_z B_z)) \cdot \boldsymbol{e}_z \\ & \quad -\epsilon^2 (B_{z0} + \epsilon^2 B_z) \nabla^2 B_z + \epsilon^3 (B_{z0} + \epsilon^2 B_z) \partial_z^2 B_z. \end{aligned} \tag{42}$$

以上をまとめて最高次数 (ϵ^2) のみ書き下すと

$$\begin{aligned} \nabla_\perp^2 p \quad &= \quad -\frac{1}{2} \rho \nabla_\perp^2 |\nabla_\perp \varphi|^2 + \rho (\nabla_\perp \varphi)^2 + \rho |\nabla_\perp \varphi| \cdot |\nabla_\perp^2 \nabla_\perp \varphi| \\ & \quad -\frac{1}{\mu_0} (\nabla_\perp \psi)^2 - \frac{1}{\mu_0} |\nabla_\perp \psi| \cdot |\nabla_\perp^2 \nabla_\perp \psi| - \frac{1}{\mu_0} B_{z0} \nabla_\perp^2 B_z \end{aligned} \tag{43}$$

を得る。

以上の計算から、低 β トカマクのオーダリングによって、ポロイダル磁束 ψ および流れ関数 φ に対する時間発展の形で簡約化 MHD 方程式が以下のように導かれた。

$$\partial_t \psi \quad = \quad (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \psi \tag{44}$$

$$\partial_t \nabla_\perp^2 \varphi \quad = \quad -(\boldsymbol{V}_\perp \cdot \nabla_\perp) \nabla_\perp^2 \varphi + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \nabla_\perp^2 \psi. \tag{45}$$

速度、磁場の z 成分については、それぞれ、運動方程式、誘導方程式の z 成分から計算できる。また、速度場は非圧縮になっているため、圧力は運動方程式の発散をとって得られる Poisson 方程式にしたがう。最後にオーダリングを表 1 にまとめる。

2 High β Tokamak Ordering

前節と同様に、高 β トカマクに対して、ϵ のオーダリングによって簡約化 MHD 方程式を導くことができる [2]。ただし、トロイダル効果、反磁性効果により $\epsilon 1$ 次のトロイダル磁場の変動が生じる。このとき、トロイダル効果によって運動方程式に圧力による効果が加わる。主要なオーダリングは低 β の場合と同様であるが、圧力 p が ϵ オーダであり、反磁性効果によって ϵ オーダのトロイダル磁場が存在する点が異なる。

トロイダル効果を考慮するため、以下では準トロイダル座標系を用いる。準トロイダル座標系 (r, θ, ϕ) は

$$\left\{ \begin{array}{lll} x &=& (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ y &=& (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ z &=& r\sin\theta \end{array} \right. \tag{46}$$

で定義される。ここで R は大半径、r は小半径、θ, ϕ はそれぞれポロイダル角、トロイダル角である。

磁場の発散はゼロであることから

$$\boldsymbol{B} = \nabla_\perp \psi \times \boldsymbol{e}_\phi + B_\phi \boldsymbol{e}_\phi \tag{47}$$

表 1: Low beta tokamak ordering used to derive slab reduced MHD model.

Ordering	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\epsilon)$	$\mathcal{O}(\epsilon^2)$
time derivative		∂_t	
perpendicular derivative	$\nabla_\perp$		
parallel derivative		∂_z	
toroidal field	B_{z0}		B_z
pressure			p
beta			β
poloidal flux		ψ	
stream function		φ	
parallel flow			V_z
parallel current		j_z	
perpendicular current			$\boldsymbol{j}_\perp$
perpendicular vector potential			$\boldsymbol{A}_\perp$
mass density	ρ		

とおく。トロイダル磁場はポロイダル電流を用いて

$$B_{\mathrm{t}} = \frac{I_{\mathrm{p}}}{2\pi R} \tag{48}$$

と表されることから、R 依存性を明示するため、(係数を省略して)

$$B_\phi = \frac{I_0 + I_1}{R + x} \tag{49}$$

とおく。ただし $x = r\cos\theta$ であり、I_0, I_1 はそれぞれ 0 次、1 次のポロイダル電流を表す。$x/R \sim \mathcal{O}(\epsilon)$, $I_1/I_0 \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ より

$$B_\phi = \frac{I_0}{R}(1 - \epsilon\frac{x}{R}) + \frac{\epsilon I_1}{R} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = B_0 + \epsilon(-\frac{B_0 x}{R} + \frac{I_1}{R}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{50}$$

第 2 項はトロイダル効果、第 3 項は反磁性効果によるトロイダル磁場の $\mathcal{O}(\epsilon)$ の補正を表す。発散をとると、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{R+x}\partial_\phi B_\phi = \frac{1}{R}\frac{1}{R+x}\partial_\phi I_1 \sim \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{51}$$

トロイダル磁場の 2 次の補正を考慮すれば、2 次のオーダまで発散をゼロにすることができるが、あとの議論に影響しないので考えない。 磁場の回転をとる。

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{B}_\perp = \nabla\times(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi) &= \nabla_\perp\psi(\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\phi) - \boldsymbol{e}_\phi(\nabla\cdot\nabla_\perp\psi) + (\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\nabla_\perp\psi - (\nabla_\perp\psi\cdot\nabla_\perp)\boldsymbol{e}_\phi \\ &= -\nabla_\perp^2\psi\boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{R+x}\partial_\phi\nabla_\perp\psi.\end{aligned} \tag{52}$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\phi = 0$, $\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_\phi(\phi)$ であり $\partial_r\boldsymbol{e}_\phi = 0$ および $\partial_\theta\boldsymbol{e}_\phi = 0$ を用いた。また、

$$\begin{aligned}\nabla\times(B_\phi\boldsymbol{e}_\phi) &= \nabla\times(B_\phi(R+x)\nabla\phi) \\ &= \nabla_\perp(B_\phi(R+x))\times\nabla\phi \\ &= [(R+x)\nabla_\perp B_\phi + B_\phi\nabla_\perp x]\times\nabla\phi.\end{aligned} \tag{53}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\perp B_\phi &= \nabla_\perp \frac{I_0+I_1}{R+x} = \frac{\nabla_\perp I_1(R+x)-(I_0+I_1)\nabla_\perp x}{(R+x)^2} \\
&= \frac{1}{R+x}(\nabla_\perp I_1 - B_\phi \nabla_\perp x).
\end{aligned} \tag{54}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(B_\phi \boldsymbol{e}_\phi) &= (\nabla_\perp I_1 - B_\phi\nabla_\perp x + B_\phi\nabla_\perp x)\times\nabla\phi \\
&= \nabla_\perp I_1\times\nabla\phi = \frac{\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{e}_\phi}{R+x}
\end{aligned} \tag{55}
$$

以上より

$$
\mu_0\boldsymbol{j} = \nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{R+x}(\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{e}_\phi + \partial_\phi\nabla_\perp\psi) - \nabla_\perp^2\psi\boldsymbol{e}_\phi. \tag{56}
$$

運動方程式の右辺を計算する。

$$
\begin{aligned}
\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} &= \left(\frac{1}{R+x}(\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{e}_\phi + \partial_\phi\nabla_\perp\phi) - \nabla_\perp^2\psi\boldsymbol{e}_\phi\right)\times(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi + B_\phi\boldsymbol{e}_\phi) \\
&= \frac{1}{R+x}(\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{e}_\phi)\times(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi) + \frac{1}{R+x}\partial_\phi\nabla_\perp\psi\times(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi) \\
&\quad + \frac{1}{R+x}(\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{e}_\phi)\times\left(B_0\left(1-\frac{x}{R}\right)+\frac{I_1}{R}\right)\boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{R+x}\partial_\phi\nabla_\perp\psi\times\left(B_0\left(1-\frac{x}{R}\right)+\frac{I_1}{R}\right)\boldsymbol{e}_\phi \\
&\quad -\nabla_\perp^2\psi\boldsymbol{e}_\phi\times(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi) \\
&= -\frac{1}{R+x}[(\nabla_\perp\psi\times\nabla_\perp I_1)\cdot\boldsymbol{e}_\phi]\boldsymbol{e}_\phi - \frac{1}{2}\frac{1}{R+x}\partial_\phi|\nabla_\perp\psi|^2\boldsymbol{e}_\phi \\
&\quad -\frac{1}{R+x}\left(B_0\left(1-\frac{x}{R}\right)+\frac{I_1}{R}\right)\nabla_\perp I_1 + \frac{1}{R+x}\left(B_0\left(1-\frac{x}{R}\right)+\frac{I_1}{R}\right)\partial_\phi\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi \\
&\quad -\nabla_\perp^2\psi\nabla_\perp\psi
\end{aligned} \tag{57}
$$

より、$1/(R+x)\sim 1/R\,(1-x/R)$ に注意してオーダ毎に整理すると、

$$
\mathcal{O}(\epsilon):\quad -\frac{B_0}{R}\nabla_\perp I_1, \tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(\epsilon^2):\quad & -\nabla_\perp\psi\nabla_\perp\psi - \frac{1}{R}\nabla_\perp I_1\left(-\frac{2B_0x}{R}+\frac{I_1}{R}\right) + \frac{B_0}{R}\partial_\phi\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi \\
& -\frac{1}{R}\left[(\nabla_\perp\psi\times\nabla_\perp I_1)\cdot\boldsymbol{e}_\phi)\right]\boldsymbol{e}_\phi.
\end{aligned} \tag{59}
$$

運動方程式の ϵ の 1 次の項から

$$
\nabla_\perp\left(p+\frac{B_0I_1}{\mu_0R}\right)=0. \tag{60}
$$

ϕ の任意関数 $C_1(\phi)$ を積分定数として

$$
p+\frac{B_0I_1}{\mu_0R} = C_1(\phi). \tag{61}
$$

運動方程式の平行成分をみると、最高次は ϵ^2 であり

$$
\rho\frac{\mathrm{d}V_\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{B_0}\boldsymbol{B}\cdot\nabla p. \tag{62}
$$

流れが非圧縮であれば、$\mathrm{d}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla p)/\mathrm{d}t=0$ が示せる。よって、初期に $\boldsymbol{B}\cdot\nabla p=0$ であれば、トロイダル方向の加速は生じない。さもなければ、V_ϕ は時間とともに増加しオーダリングは破綻する。V_ϕ は初期には $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ であるとし、非圧縮性を仮定して、

$$\boldsymbol{V}=\nabla_\perp\varphi\times\boldsymbol{e}_\phi+V_\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{63}$$

とおく。発散をとると

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{1}{R+x}\partial_\phi V_\phi\sim\mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{64}$$

運動方程式の直交成分 (ϵ^2) を書き下すと

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_\perp}{\mathrm{d}t}=-\nabla_\perp^2\psi\nabla_\perp\psi-\frac{1}{R}\nabla_\perp I_1\left(-\frac{2B_0x}{R}+\frac{I_1}{R}\right)+\frac{B_0}{R}\partial_\phi\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi. \tag{65}$$

渦度方程式の ϕ 成分を計算する。運動方程式の回転をとると

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\times\boldsymbol{V}=\nabla\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}) \tag{66}$$

であり、左辺は低 β の場合と同様

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\times\boldsymbol{V}=-\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2\varphi \tag{67}$$

となる。一方、右辺はトロイダル磁場の 1 次成分のため低 β の場合と異なる。右辺の ϕ 成分をとると

$$\nabla\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{e}_\phi=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)j_\phi-(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)B_\phi+((\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{j}_\perp-(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_\perp)\cdot\boldsymbol{e}_\phi. \tag{68}$$

ここで、$\partial_\phi\boldsymbol{e}_\phi=-\nabla_\perp x$ に起因して、右辺第 3, 4 項はゼロではないことに注意。右辺第 1 項より

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{j}=-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\nabla_\perp^2\psi. \tag{69}$$

右辺第 2 項より

$$\begin{aligned}\mu_0(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)B_\phi &= \frac{1}{R+x}\left[(\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{e}_\phi+\partial_\phi\nabla_\perp\psi)\cdot\nabla_\perp-\nabla_\perp^2\psi\partial_\phi\right]B_\phi\\ &= \frac{1}{R+x}\left[\boldsymbol{e}_\phi\cdot(\nabla_\perp B_\phi\times\nabla_\perp I_1)+\partial_\phi\nabla_\perp\psi\cdot\nabla_\perp\partial_\phi B_\phi-\nabla_\perp^2\psi\partial_\phi B_\phi\right].\end{aligned} \tag{70}$$

$$\nabla_\perp B_\phi=\frac{1}{R+x}(\nabla_\perp I_1-B_\phi\nabla_\perp x) \tag{71}$$

を考慮して、最高次 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ を書き下すと、

$$(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)B_\phi=-\frac{B_0}{\mu_0R^2}(\nabla_\perp x\times\nabla_\perp I_1)\cdot\boldsymbol{e}_\phi=\frac{1}{R}(\nabla_\perp x\times\nabla_\perp p)\cdot\boldsymbol{e}_\phi. \tag{72}$$

(68) の右辺第 3 項で $\partial_\phi\boldsymbol{e}_\phi$ を含む項の ϕ 成分を計算する。

$$\begin{aligned}\left[B_\phi\frac{1}{R+x}\partial_\phi\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{R+x}\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{e}_\phi\right]\cdot\boldsymbol{e}_\phi &= -\frac{B_\phi}{\mu_0(R+x)^2}(\nabla_\perp I_1\times\nabla_\perp x)\cdot\boldsymbol{e}_\phi\\ &= -\frac{B_0}{\mu_0R^2}(\nabla_\perp I_1\times\nabla_\perp x)\cdot\boldsymbol{e}_\phi\\ &= -\frac{1}{R}(\nabla_\perp x\times\nabla_\perp p)\cdot\boldsymbol{e}_\phi.\end{aligned} \tag{73}$$

同様に (68) の右辺第 4 項から

$$-\nabla_\perp^2\psi\frac{1}{R+x}\partial_\phi(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi)\cdot\boldsymbol{e}_\phi=\frac{1}{R+x}\nabla_\perp^2\psi(\nabla_\perp\psi\times\nabla_\perp x)\cdot\boldsymbol{e}_\phi\sim\mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{74}$$

以上をまとめると、渦度方程式の ϕ 成分の最高次 (ϵ^2) は

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2\varphi=\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\nabla_\perp^2\psi+\frac{2}{R}(\nabla_\perp x\times\nabla_\perp p)\cdot\boldsymbol{e}_\phi \tag{75}$$

を得る。

磁場の曲率 $\boldsymbol{\kappa}$ を

$$\boldsymbol{\kappa}\equiv(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}/B \tag{76}$$

で定義する。$B\simeq B_\phi$ より

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_\phi+\boldsymbol{b}_\mathrm{p},\quad \boldsymbol{b}_\mathrm{p}=(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi)/B_\phi\sim\mathcal{O}(\epsilon) \tag{77}$$

であり、$\boldsymbol{\kappa}$ を書き下すと、

$$\boldsymbol{\kappa}=(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_\phi+(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}+(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}. \tag{78}$$

最高次は

$$\boldsymbol{\kappa}^{(1)}=(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_\phi=-\frac{\nabla_\perp x}{R+x}\sim\mathcal{O}(\epsilon). \tag{79}$$

Helical 系では磁場の平均曲率はしばしば、Ω で表される [3]。Tokamak では $\Omega=2x/R$ となり、$2\boldsymbol{\kappa}=-\nabla_\perp\Omega$。$\boldsymbol{\kappa}$ を用いると

$$\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\nabla\frac{B^2}{2}=B^2\boldsymbol{\kappa}-\nabla\frac{B^2}{2} \tag{80}$$

と書ける。回転をとると

$$\mu_0\nabla\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})=\nabla\times(B^2\boldsymbol{\kappa})=\nabla B^2\times\boldsymbol{\kappa}+B^2\nabla\times\boldsymbol{\kappa}. \tag{81}$$

第 2 項から

$$\nabla\times\boldsymbol{\kappa}=\nabla\times\left[(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_\phi+(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}+(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\right]. \tag{82}$$

各項を計算する。第 1 項より

$$\begin{aligned}\nabla\times[(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_\phi] &= -\nabla\times\left(\frac{1}{R+x}\nabla_\perp x\right)\\ &= \frac{1}{(R+x)^2}\nabla_\perp x\times\nabla_\perp x-\frac{1}{R+x}\nabla\times\nabla_\perp x=0.\end{aligned} \tag{83}$$

(82) 第 2 項より

$$\begin{aligned}\nabla\times[(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}] &= \nabla\times\left(\frac{1}{R+x}\partial_\phi\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\right)\\ &= -\frac{1}{(R+x)^2}\nabla_\perp x\times\partial_\phi\boldsymbol{b}_\mathrm{p}+\frac{1}{R+x}\partial_\phi\nabla\times\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\end{aligned} \tag{84}$$

ここで、

$$\partial_\phi\boldsymbol{b}_\mathrm{p}=\frac{1}{B_\phi}\partial_\phi(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi)=\frac{1}{B_\phi}(\partial_\phi\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi-\nabla_\perp\psi\times\nabla_\perp x). \tag{85}$$

よって第 1 項から

$$-\frac{1}{B_\phi(R+x)^2}(-|\nabla_\perp x|^2\nabla_\perp\psi+(\nabla_\perp x\cdot\nabla_\perp\psi)\nabla_\perp x-(\partial_\phi\nabla_\perp\psi\cdot\nabla_\perp x)\boldsymbol{e}_\phi)\sim\mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{86}$$

また、

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{b}_\mathrm{p} &= \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{p}}{B_\phi}\right)=-\frac{\nabla_\perp B_\phi}{B_\phi^2}\times(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi)+\frac{1}{B_\phi}\nabla\times\boldsymbol{B}_\mathrm{p}\\ &= \frac{1}{B_\phi^2}(\nabla_\perp\psi\cdot\nabla_\perp B_\phi)\boldsymbol{e}_\phi+\frac{1}{B_\phi}(-\nabla_\perp^2\psi\boldsymbol{e}_\phi+(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\nabla_\perp\psi)\\ &= \frac{1}{B_\phi}(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\nabla_\perp\psi+\frac{1}{B_\phi^2}(\nabla_\perp\psi\cdot\nabla_\perp B_\phi-B_\phi\nabla_\perp^2\psi)\boldsymbol{e}_\phi\\ &= \frac{\mu_0 j_\phi}{B_\phi}\boldsymbol{e}_\phi+\mathcal{O}(\epsilon^2),\quad(\mu_0 j_\phi=-\nabla_\perp^2\psi).\end{aligned} \tag{87}$$

代入すると、$\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla B_\phi=0$ に注意して

$$\nabla\times[(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}] = \frac{\mu_0}{B_\phi}\left[(\boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla)j_\phi\right]\boldsymbol{e}_\phi-\frac{\mu_0 j_\phi}{B_\phi}\frac{\nabla_\perp x}{R+x}+\mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{88}$$

(82) 第 3 項より

$$\nabla\times[(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}] = (\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)(\nabla\times\boldsymbol{b}_\mathrm{p})+(\nabla\cdot\boldsymbol{b}_\mathrm{p})(\nabla\times\boldsymbol{b}_\mathrm{p})-(\nabla\times\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_\mathrm{p}. \tag{89}$$

第 1 項より、$\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 以上を無視すると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)(\nabla\times\boldsymbol{b}_\mathrm{p}) &= (\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)\frac{\mu_0 j_\phi}{B_\phi}\boldsymbol{e}_\phi\simeq\left[(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)\frac{\mu_0 j_\phi}{B_\phi}\right]\boldsymbol{e}_\phi\\ &= \left[\frac{\mu_0}{B_\phi}(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)j_\phi-\frac{\mu_0 j_\phi}{B_\phi^2}(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)B_\phi\right]\boldsymbol{e}_\phi\\ &\simeq \frac{\mu_0}{B_\phi}[(\boldsymbol{b}_\mathrm{p}\cdot\nabla)]j_\phi\boldsymbol{e}_\phi.\end{aligned} \tag{90}$$

第 2 項において

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{b}_\mathrm{p} &= -\frac{\nabla_\perp B_\phi}{B_\phi^2}\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{p}+\frac{1}{B_\phi}\nabla\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{p}\\ &= -\frac{1}{B_\phi^2}\nabla_\perp B_\phi\cdot(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi)+\frac{1}{B_\phi}\nabla\cdot(\nabla_\perp\psi\times\boldsymbol{e}_\phi)\\ &= -\frac{1}{B_\phi^2}(\nabla_\perp B_\phi\times\nabla_\perp\psi)\cdot\boldsymbol{e}_\phi-\frac{1}{B_\phi}\nabla_\perp\psi\cdot\nabla\times\boldsymbol{e}_\phi\\ &= -\frac{1}{B_\phi^2}(\nabla_\perp B_\phi\times\nabla_\perp\psi)\cdot\boldsymbol{e}_\phi+\frac{1}{B_\phi(R+x)}\nabla_\perp\psi\cdot\nabla_\perp x\sim\mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned} \tag{91}$$

よって、第 2 項は $\mathcal{O}(\epsilon^3)$。第 3 項も $\mathcal{O}(\epsilon^3)$。以上から、

$$\nabla\times\boldsymbol{\kappa}=\frac{\mu_0}{B_\phi}[(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)j_\phi]\boldsymbol{e}_\phi-\frac{\mu_0 j_\phi}{B_\phi}\frac{\nabla_\perp x}{R+x}+\mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{92}$$

となる。よって (81) 第 2 項の ϕ 方向成分として

$$B^2\nabla\times\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{e}_\phi = B^2\frac{1}{B_\phi}[(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\mu_0 j_\phi] \simeq -(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\nabla_\perp^2\psi \tag{93}$$

を得る。(81) 第 1 項から最高次 (ϵ^2) は

$$\nabla B^2\times\boldsymbol{\kappa} = 2B_0\nabla B_1\times\boldsymbol{\kappa} = \frac{2B_0}{R}\nabla_\perp I_1\times\boldsymbol{\kappa} = -2\nabla_\perp p\times\boldsymbol{\kappa} \tag{94}$$

となる。以上まとめると渦度方程式の ϕ 成分から

$$-\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2\varphi = -\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\nabla_\perp^2\psi + 2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\kappa})\cdot\nabla_\perp p \tag{95}$$

が得られる。$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\kappa})\cdot\nabla_\perp p = (\boldsymbol{\kappa}\times\nabla_\perp p)\cdot\boldsymbol{b} \simeq 1/R(\nabla_\perp p\times\nabla_\perp x)\cdot\boldsymbol{e}_\phi$ より (75) と等しいことが分かる。

トロイダル効果によって運動方程式が圧力とカップルするため、圧力の時間変化を解く必要がある。断熱条件 $p/\rho^\gamma = \mathrm{const.}$ より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = -\gamma p(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) \tag{96}$$

非圧縮の仮定から右辺は無視できるほど小さくなければならない。よって γ はたかだか ϵ^{-1} であり (完全に非圧縮ならば $\gamma\to\infty$)、

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{97}$$

誘導方程式は低 β の場合と変わらない。トロイダル座標系であることを考慮して

$$\partial_t\psi = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\varphi + \frac{1}{R}\partial_\phi\chi' = -(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)\psi + \frac{B_0}{R}\partial_\phi\varphi + \frac{1}{R}\partial_\phi\chi'. \tag{98}$$

最後に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla p) = 0 \tag{99}$$

を示す。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp p + \frac{B_0}{R}\partial_\phi p\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp p) + (\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp p) + \frac{B_0}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_\phi p. \end{aligned} \tag{100}$$

$$\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp p = \boldsymbol{e}_\phi\cdot\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi. \tag{101}$$

$\boldsymbol{e}_\phi$ は r, θ に依存しないので

$$(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)(\boldsymbol{B}_\perp\cdot\nabla_\perp p) = \boldsymbol{e}_\phi\cdot[(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)(\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi)]. \tag{102}$$

$$(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp)(\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi) = \nabla_\perp\times[(\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi)\times\boldsymbol{V}_\perp] - (\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi)\cdot\nabla_\perp\boldsymbol{V}_\perp \tag{103}$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{V}_\perp = 0$, $\nabla\cdot(\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi) = 0$ を用いた。右辺第 2 項は $\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi$ が平行成分しか持たないため、$\nabla_\perp\boldsymbol{V}_\perp$ と内積をとるとゼロ。

$$(\nabla_\perp p\times\nabla_\perp\psi)\times\boldsymbol{V}_\perp = -\nabla_\perp p(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp\psi) + \nabla_\perp\psi(\boldsymbol{V}_\perp\cdot\nabla_\perp p) \tag{104}$$

ψ, p の時間発展 (97), (98) より

$$(\nabla_\perp p \times \nabla_\perp \psi) \times \boldsymbol{V}_\perp = -\nabla_\perp p \left(\frac{B_0}{R}\partial_\phi \varphi + \frac{1}{R}\partial_\phi \chi' - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \nabla_\perp \psi \frac{\partial p}{\partial t} \tag{105}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \nabla_\perp \times [(\nabla_\perp p \times \nabla_\perp \psi) \times \boldsymbol{V}_\perp] &= \nabla_\perp \left(\frac{B_0}{R}\partial_\phi \varphi + \frac{1}{R}\partial_\phi \chi' - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \times \nabla_\perp p + \nabla_\perp \frac{\partial p}{\partial t} \times \nabla_\perp \psi \\ &= \nabla_\perp \frac{B_0}{R}\partial_\phi \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla_\perp p \times \nabla_\perp \psi \right) \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla p) &= \boldsymbol{e}_\phi \cdot \nabla_\perp \frac{B_0}{R}\partial_\phi \varphi \times \nabla_\perp p + \frac{B_0}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_\phi p \\ &= \frac{B_0}{R}\left[\boldsymbol{e}_\phi \cdot \nabla_\perp \partial_\phi \varphi \times \nabla_\perp p + \frac{\partial}{\partial t}\partial_\phi \nabla_\perp p + \nabla_\perp \varphi \times \boldsymbol{e}_\phi \cdot \nabla_\perp \partial_\phi p \right] \\ &= \frac{B_0}{R}\left[\frac{\partial}{\partial t}\partial_\phi \nabla_\perp p + \boldsymbol{e}_\phi \cdot \partial_\phi (\nabla_\perp \varphi \times \nabla_\perp p) \right] \\ &= \frac{B_0}{R}\partial_\phi \left[\frac{\partial}{\partial t} p + \boldsymbol{e}_\phi \cdot (\nabla_\perp \varphi \times \nabla_\perp p) \right] \\ &= \frac{B_0}{R}\partial_\phi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p = 0. \end{aligned} \tag{107}$$

よって、流れが非圧縮なら $\boldsymbol{B}\cdot\nabla p$ が変化しないことが示された。初期に $\boldsymbol{B}\cdot\nabla p = 0$ なら、常に $\boldsymbol{B}\cdot\nabla p = 0$ であり、トロイダル方向に加速は生じない。

高 β トカマクオーダリングにおいては、ポロイダル磁束 ψ、流れ関数 φ、および圧力 p の時間発展として

$$\partial_t \psi = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\psi, \tag{108}$$

$$\partial_t \nabla_\perp^2 \varphi = -(\boldsymbol{V}_\perp \cdot \nabla_\perp)\nabla_\perp^2 \varphi + \frac{1}{\mu_0 \rho}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\nabla_\perp^2 \psi + \frac{2}{R\rho}\nabla_\perp x \times \nabla_\perp p, \tag{109}$$

$$\partial_t p = -(\boldsymbol{V}_\perp \cdot \nabla_\perp) p \tag{110}$$

が得られる。オーダリングを表 2 にまとめる。

2.1 Resistive Ordering

Drake と Antonsen による抵抗性モードを矛盾なくあつかうオーダリング [4] によると、磁場は

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_\mathrm{p} + B_0 \boldsymbol{e}_\phi = \nabla_\perp \psi \times \boldsymbol{e}_\phi + B_0 \boldsymbol{e}_\phi \tag{111}$$

で表され、トロイダル磁場は一様であるが、ポロイダル磁場による効果を保持する。電流は

$$\mu_0 \boldsymbol{j} = \nabla \times \boldsymbol{B} = -\nabla_\perp^2 \psi \boldsymbol{e}_\phi + (\boldsymbol{e}_\phi \cdot \nabla)\nabla_\perp \psi + \frac{B_0}{R+x}\nabla_\perp x \times \boldsymbol{e}_\phi \tag{112}$$

となる。

表 2: High beta tokamak ordering used to derive reduced MHD model.

Ordering	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\epsilon)$	$\mathcal{O}(\epsilon^2)$
time derivative		∂_t	
perpendicular derivative	$\nabla_\perp$		
parallel derivative		$\frac{1}{R}\partial_\phi$	
toroidal field	B_0	$B_\phi = -\frac{B_0 x}{R} + \frac{I_1}{R}$	
pressure		p	
beta		β	
poloidal flux		ψ	
stream function		φ	
parallel flow			V_ϕ
parallel current		j_ϕ	
perpendicular current		$\boldsymbol{j}_\perp$	
mass density	ρ		

運動方程式の最低次のオーダから、有限の圧力の効果がゼロ次の平衡を記述する式に残る。

$$\nabla_\perp \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} = B^2 \boldsymbol{\kappa}. \tag{113}$$

オームの法則より $\boldsymbol{V}_\perp$ は

$$\boldsymbol{V}_\perp = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2} - \frac{\eta}{B^2}\nabla_\perp p = -\frac{\nabla\varphi \times \boldsymbol{B}}{B^2} - \frac{\eta}{B^2}\nabla_\perp p. \tag{114}$$

発散をとると、第 1 項より

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \frac{\nabla\varphi \times \boldsymbol{B}}{B^2} &= -\nabla\frac{1}{B^2} \cdot \nabla\varphi \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{B^2}\nabla \cdot (\nabla\varphi \times \boldsymbol{B}) \\ &= -\frac{\nabla B^2}{B^2} \cdot \boldsymbol{V}_\perp + \frac{1}{B^2}\nabla\varphi \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} \\ &= \frac{2\mu_0 \nabla p - 2B^2\boldsymbol{\kappa}}{B^2} \cdot \boldsymbol{V}_\perp + \frac{\mu_0}{B^2}\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{j} \\ &= -2\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{V}_\perp + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{115}$$

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ から

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}_\perp = -2\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{V}_\perp = -\frac{2}{B}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla_\perp \varphi. \tag{116}$$

3 Resistive Drift Wave Equation

電子、イオンそれぞれの連続の式、運動方程式より

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}}) = 0 \tag{117}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}}) = 0 \tag{118}$$

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{en}\nabla p_e + \eta \boldsymbol{j}_{\parallel} = 0 \tag{119}$$

$$nm\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}_{\mathrm{i}}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}}\right] = en(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{B}) \tag{120}$$

ここで、η は磁力線方向の電子間衝突による電気抵抗であり、衝突周波数 ν_{e} を用いて $\eta = m_{\mathrm{e}}\nu_{\mathrm{e}}/ne^2$ で与えられる。電子の慣性は無視し、イオン温度は十分低く $T_{\mathrm{i}} = 0$、よって $p_{\mathrm{i}} = 0$ とした。また、準中性条件より $n = n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{i}}$ とする。電子はトロイダル方向には等温を仮定し、

$$p_{\mathrm{e}} = nT_{\mathrm{e}} \tag{121}$$

とする $(\omega/\nu_{\mathrm{e}} \ll v_{T_{\mathrm{e}}}^2 k_z^2/\nu_{\mathrm{e}}^2 \lesssim \mathcal{O}(1))$ 。磁場はトロイダル方向のみで一様 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z$ とし、静電的な揺らぎのみを考え、静電ポテンシャル φ を用いて $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ とする。

以下のオーダリングを用いて、ドリフト波方程式を導く。

$$\partial_t \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad \nabla_{\perp} \sim \mathcal{O}(1), \quad \nabla_{\parallel} \sim \mathcal{O}(\epsilon), \tag{122}$$

$$B_0 \sim \mathcal{O}(1), \quad \varphi \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad \boldsymbol{V} \sim \mathcal{O}(\epsilon) \tag{123}$$

電子の運動方程式の平行成分より

$$-\nabla_{\parallel}\varphi + \frac{1}{en}\nabla_{\parallel}p_{\mathrm{e}} - \eta j_{\parallel} = 0. \tag{124}$$

$p_{\mathrm{e}} = nT_{\mathrm{e}}$ より

$$\frac{1}{n}\nabla p_{\mathrm{e}} = T_{\mathrm{e}}\nabla \ln n. \tag{125}$$

$j_{\parallel}$ について整理すると、

$$j_{\parallel} = -\frac{1}{\eta}\nabla_{\parallel}\left(\varphi - \frac{T_{\mathrm{e}}}{e}\ln n\right). \tag{126}$$

平行方向にイオンは動かないとすると $j_{\parallel} = -enV_{\mathrm{e},\parallel}$ であり、

$$V_{\mathrm{e},\parallel} = \frac{1}{en\eta}\nabla_{\parallel}\left(\varphi - \frac{T_{\mathrm{e}}}{e}\ln n\right). \tag{127}$$

電子の運動方程式と $\boldsymbol{B}_0$ との外積をとると

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}_0 - B_0^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{e},\perp} + \frac{1}{en}\nabla_{\perp}p_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{B}_0 = 0. \tag{128}$$

よって

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{e},\perp} = -\frac{\nabla_{\perp}\varphi \times \boldsymbol{B}_0}{B_0^2} + \frac{\nabla_{\perp}p_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{B}_0}{enB_0^2}. \tag{129}$$

右辺第 1 項は $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト、第 2 項は反磁性ドリフトをあらわす (ともに ϵ オーダ)。以下それぞれ $\boldsymbol{V}_E$, $\boldsymbol{V}_\mathrm{d}$ と書く。$p_\mathrm{e}=nT_\mathrm{e}$ を用いると

$$\boldsymbol{V}_\mathrm{d}=\frac{T_\mathrm{e}}{eB_0^2}\nabla_\perp\ln n\times\boldsymbol{B}_0 \tag{130}$$

と表される。

次に、イオンの運動の直交成分について考える (平行成分はゼロ)。イオンの運動方程式 (120) の右辺は ϵ^2 であるから、ϵ オーダの成分として

$$\boldsymbol{V}_\mathrm{i}^{(1)}=\boldsymbol{V}_E \tag{131}$$

を得る。$\boldsymbol{V}_\mathrm{i}^{(1)}=\boldsymbol{V}_E$ を代入し、ϵ^2 オーダを考えると、

$$nm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}_E=en\boldsymbol{V}_\mathrm{i}^{(2)}\times\boldsymbol{B}_0 \tag{132}$$

$\boldsymbol{V}_\mathrm{i}^{(2)}$ について解くと

$$\boldsymbol{V}_\mathrm{i}^{(2)}=-\frac{m}{B_0^2e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V}_E\times\boldsymbol{B}_0)=-\frac{1}{B_0\omega_\mathrm{ci}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp\varphi. \tag{133}$$

ただし、ω_ci はイオンのサイクロトロン周波数であり、$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\equiv\partial/\partial t+\boldsymbol{V}_E\cdot\nabla_\perp$ である。イオンの速度の ϵ^2 の成分として、分極ドリフト (電場の変動によるドリフト) が得られた。分極ドリフトを $\boldsymbol{V}_\mathrm{p}$ で表すとイオンの速度の直交成分として

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{i},\perp}=\boldsymbol{V}_E+\boldsymbol{V}_\mathrm{p} \tag{134}$$

を得る。

電子、イオンそれぞれの連続の式、および準中性条件から電流の発散はゼロである

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{135}$$

$\boldsymbol{j}=en(\boldsymbol{V}_\mathrm{i}-\boldsymbol{V}_\mathrm{e})$ から、求めた速度成分を代入すると

$$\nabla_\perp\cdot(n(\boldsymbol{V}_\mathrm{p}-\boldsymbol{V}_\mathrm{d}))=\nabla_\parallel(nV_{\mathrm{e},\parallel}). \tag{136}$$

各項を計算する。

$$\begin{aligned}\nabla_\perp\cdot(n\boldsymbol{V}_\mathrm{d}) &= \frac{T_\mathrm{e}}{eB_0^2}\left[\nabla_\perp n\cdot(\nabla_\perp\ln n\times\boldsymbol{B}_0)+n\nabla_\perp\cdot(\nabla_\perp\ln n\times\boldsymbol{B}_0)\right]\\ &= \frac{T_\mathrm{e}}{eB_0^2}\left[\boldsymbol{B}_0\cdot\left(\nabla_\perp n\times\frac{1}{n}\nabla_\perp n\right)+n\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla_\perp\times\nabla_\perp\ln n\right]=0.\end{aligned} \tag{137}$$

$$\nabla_\perp\cdot(n\boldsymbol{V}_\mathrm{p})=\nabla_\perp n\cdot\boldsymbol{V}_\mathrm{p}+n\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{V}_\mathrm{p}=-\frac{1}{B_0\omega_\mathrm{ci}}\left[\nabla_\perp n\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp\varphi+n\nabla_\perp\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp\varphi\right] \tag{138}$$

右辺第 2 項から

$$\nabla_\perp\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp\varphi+(\boldsymbol{V}_E\cdot\nabla_\perp)\nabla_\perp\varphi\right]=\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2\varphi+\nabla_\perp\cdot\left[(\boldsymbol{V}_E\cdot\nabla_\perp)\nabla_\perp\varphi\right]. \tag{139}$$

ベクトル公式

$$\nabla\cdot[(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{B}]=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+\mathrm{Tr}(\nabla\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}) \tag{140}$$

より

$$\nabla_\perp \cdot [(\boldsymbol{V}_E \cdot \nabla_\perp)\nabla_\perp \varphi] = (\boldsymbol{V}_E \cdot \nabla_\perp)\nabla_\perp^2 \varphi + \mathrm{Tr}(\nabla_\perp \boldsymbol{V}_E \cdot \nabla_\perp \nabla_\perp \varphi) = (\boldsymbol{V}_E \cdot \nabla_\perp)\nabla_\perp^2 \varphi. \tag{141}$$

よって

$$\nabla_\perp \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp \varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2 \varphi \tag{142}$$

である。

$$\nabla_\parallel (nV_{\mathrm{e},\parallel}) = -\frac{1}{e}\nabla_\parallel j_\parallel. \tag{143}$$

以上をまとめると $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ より

$$\frac{mn}{B_0^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2 \varphi = -\frac{m}{B_0^2}\nabla_\perp n \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp \varphi + \nabla_\parallel j_\parallel. \tag{144}$$

等価な式がイオンの渦度方程式の平行成分からも得られる。イオンの運動方程式から Ohm の法則 (119) を用いて電場を消去すると

$$nm\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}_\mathrm{i}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}_\mathrm{i} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_\mathrm{i}\right] = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}_0 - \nabla p_\mathrm{e}. \tag{145}$$

回転をとると

$$m\left[\nabla n \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}_\mathrm{i} + n\nabla \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}_\mathrm{i}\right] = \nabla \times (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}_0). \tag{146}$$

左辺第 1 項の平行成分より

$$\frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0} \cdot \nabla n \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{-\nabla_\perp \varphi \times \boldsymbol{B}_0}{B_0^2}\right) = \frac{1}{B_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp \varphi \cdot \nabla_\perp n \tag{147}$$

左辺第 2 項より

$$\nabla \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}_\mathrm{i} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{V}_\mathrm{i} + (\boldsymbol{V}_\mathrm{i} \cdot \nabla)\nabla \times \boldsymbol{V}_\mathrm{i} - (\nabla \times \boldsymbol{V}_\mathrm{i} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla \times \boldsymbol{V}_\mathrm{i}) - (\nabla \times \boldsymbol{V}_\mathrm{i} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_\mathrm{i} \tag{148}$$

イオンの渦度は

$$\nabla \times \boldsymbol{V}_\mathrm{i} = \frac{\nabla_\perp^2 \varphi}{B_0^2}\boldsymbol{B}_0. \tag{149}$$

であり、イオン速度の平行成分がゼロであることから、

$$\frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0} \cdot \nabla \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}_\mathrm{i} = \frac{1}{B_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2 \phi. \tag{150}$$

右辺から

$$\nabla \times (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}_0) = (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{j} = B_0 \nabla_\parallel \boldsymbol{j} \tag{151}$$

以上をまとめると (144) と同じ式が得られる。

電子の連続の式より

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot (n\boldsymbol{V}_{\mathrm{e},\perp}) = -\nabla_\parallel (nV_{\mathrm{e},\parallel}) \tag{152}$$

$\boldsymbol{V}_{\mathrm{e},\perp}$, $V_{\mathrm{e},\parallel}$ を代入して

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{e}\nabla_\parallel j_\parallel. \tag{153}$$

以上より、静電ポテンシャル φ, 密度 n に対してドリフト波方程式

$$\begin{aligned} \frac{mn}{B_0^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2\varphi &= -\frac{m}{B_0^2}\nabla_\perp n\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp\varphi + \nabla_\parallel j_\parallel. && (154)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n &= \frac{1}{e}\nabla_\parallel j_\parallel && (155)\end{aligned}$$

を得る。ここで $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + \boldsymbol{V}_E\cdot\nabla_\perp$、$j_\parallel = -1/\eta\nabla_\parallel(\varphi - T_\mathrm{e}/e\ln n)$ である。

磁場の曲率を考慮すると、流れに $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の圧縮性が生じる。

$$\begin{aligned} \nabla_\perp\cdot(n\boldsymbol{V}_{\mathrm{e},\perp}) &= \boldsymbol{V}_E\cdot\nabla_\perp n + n\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{V}_{\mathrm{e},\perp}\\ &= \boldsymbol{V}_E\cdot\nabla_\perp n - 2n\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}_{\mathrm{e},\perp}\\ &= \boldsymbol{V}_E\cdot\nabla_\perp n - \frac{2n}{B}\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla_\perp\left(\frac{T_\mathrm{e}}{e}\ln n - \varphi\right)\times\boldsymbol{b}. && (156)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{mn}{B^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp^2\varphi &= -\frac{m}{B^2}\nabla_\perp n\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_\perp\varphi + \nabla_\parallel j_\parallel + \frac{2}{B}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla_\perp p && (157)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n &= \frac{1}{e}\nabla_\parallel j_\parallel + \frac{2nT_\mathrm{e}}{eB}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla_\perp\left(\ln n - \frac{e\varphi}{T_\mathrm{e}}\right). && (158)\end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{V}_E \equiv -\nabla_\perp\varphi\times\boldsymbol{B}/B^2$ であり、静電ポテンシャルと通常の流れ関数は符号が逆であることから、(95) との符号の違いに注意。

参考文献

[1] H.R. Strauss, Phys. Fluids **19**, 134 (1976).

[2] H.R. Strauss, Phys. Fluids **20**, 1354 (1977).

[3] H.R. Strauss, Plasma Phys. **22**, 733 (1980).

[4] J.F. Drake, and T.M. Antonsen, Jr., Phys. Fluids **27**, 898 (1984).

[5] M. Wakatani, A. Hasegawa, Phys. Fluids **27**, 611 (1984).

[6] A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids **21**, 87 (1978).