サンプリング定理

沼田 龍介
The Australian National University

平成 18 年 5 月 10 日

Fourier 変換、逆変換を以下で定義する。

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(k)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \tag{2}$$

$\varphi(x)$ が、ある波数 K 以上の波数成分を持たない時、逆変換は

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K}\tilde{\varphi}(k)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{3}$$

と書ける。

Definition 1 (Nyquist Condition)**.** 関数 $f(x)$ が ***Nyquist* の条件**を満足するとは、ある波数以上の *Fourier* 成分を持たないことをいう。すなわち、$f(x)$ の *Fourier* 変換 $\tilde{f}(k)$ がある K に対して

$$\tilde{f}(k) = 0 \qquad (|k| \geq K) \tag{4}$$

を満足する。

区間 $k \in [-K, K]$ で $\tilde{\psi}(k)$ を Fourier 級数に展開すると

$$\tilde{\psi}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi(x_n)e^{-\mathrm{i}kx_n}. \tag{5}$$

ここで $x_n = n\pi/K$ であり、係数 $\psi(x_n)$ は以下で与えられる。

$$\psi(x_n) = \frac{1}{2K}\int_{-K}^{K}\tilde{\psi}(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k. \tag{6}$$

一方、(1) の積分を離散化すると

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x'_n)e^{-\mathrm{i}kx'_n}\Delta x. \tag{7}$$

ただし $x'_n = n\Delta x$ である。(3) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x'_n)e^{-\mathrm{i}kx'_n}\Delta x e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\
&= \frac{\Delta x}{2\pi}\int_{-K}^{K}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x'_n)e^{-\mathrm{i}kx'_n}\right)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$\Delta x = \pi/K$ とすると、$x'_n = x_n$ であり、$x \to x_n$ とすると (8) は (5),(6) の表式と一致する。以上より、波数空間で局在化することと実空間で離散化することは対応していることがわかる。

(8) に $\Delta x = \pi/K$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2K}\int_{-K}^{K}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x_n)e^{-\mathrm{i}k(x_n-x)}\right)\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2K}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x_n)\int_{-K}^{K}e^{-\mathrm{i}k(x_n-x)}\mathrm{d}k \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x_n)\frac{\sin K(x_n-x)}{K(x_n-x)}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

標本化関数 $S(x)$ を

$$
S(x) = \frac{\sin Kx}{Kx} = S(-x) \qquad (10)
$$

で定義すると

$$
\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x_n)S(x_n-x) \qquad (11)
$$

となる。Fourier 変換は以下のように、実空間で離散化、波数空間で局在化している。

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K}\tilde{\varphi}(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k \qquad (12) \\
\tilde{\varphi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x_n)e^{-\mathrm{i}kx_n}\Delta x. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Theorem 1 (Sampling Theorem (Nyquist, Shannon, Someya))**.** 関数 $\varphi(x)$ が *Nyquist* の条件を満たすとき、$\Delta x = \pi/K$ ごとに標本化したデータ $\{\varphi(x_n)\}$ を用いて、もとの関数 $\varphi(x)$ を *(11)* のように構成できる。$f_{\mathrm{c}} = 1/2\Delta x$ $(2\pi f_{\mathrm{c}} = K)$ を標本間隔 *(sampling rate)* という。

さらに、実空間で局在化することを考える。$|x| > X \equiv N_x\Delta x$ のとき $\varphi(x) = 0$ とすると

$$
\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-N_x}^{N_x}\varphi(x_n)e^{-\mathrm{i}kx_n}\Delta x. \qquad (14)
$$

Nyquist 条件を満たす離散的な関数 $\psi(x_n)$ を Fourier 級数に展開すると、

$$
\psi(x_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(k_m)e^{\mathrm{i}k_m x_n} = \sum_{m=-M_k}^{M_k}\tilde{\psi}(k_m)e^{\mathrm{i}k_m x_n}. \qquad (15)
$$

ここで、$k_m = m\pi/X$ であり、$M_k\pi/X = K$ とした。係数 $\tilde{\psi}(k_m)$ は

$$\tilde{\psi}(k_m) = \frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\psi(x)e^{-\mathrm{i}k_m x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2X}\sum_{n=-N_x}^{N_x}\psi(x_n)e^{-\mathrm{i}k_m x_n}\Delta x. \tag{16}$$

一方 (12) を離散化すると

$$\varphi(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-M_k'}^{M_k'}\tilde{\varphi}(k_m')e^{\mathrm{i}k_m' x_n}\Delta k. \tag{17}$$

ただし、$k_m' = m\Delta k$, $M_k'\Delta k = K$ である。(14) に代入すると

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-N_x}^{N_x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-M_k'}^{M_k'}\tilde{\varphi}(k_m')e^{\mathrm{i}k_m' x_n}\Delta k\right)e^{-\mathrm{i}kx_n}\Delta x \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N_x}^{N_x}\left(\sum_{m=-M_k'}^{M_k'}\tilde{\varphi}(k_m')e^{\mathrm{i}k_m' x_n}\right)e^{-\mathrm{i}kx_n}\Delta x\Delta k. \end{aligned}\tag{18}$$

$\Delta k = \pi/X$ ($k_m' = k_m$, $M_k' = M_k$) とし、$k \to k_m$ とすると Fourier 級数展開の表式 (15)(16) と一致する。$\Delta k = \pi/X$ とすると (18) は

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(k) &= \frac{\Delta x\Delta k}{2\pi}\sum_{n=-N_x}^{N_x}\sum_{m=-M_k}^{M_k}\tilde{\varphi}(k_m)e^{\mathrm{i}(k_m-k)x_n} \\ &= \sum_{m=-M_k}^{M_k}\tilde{\varphi}(k_m)\left(\frac{1}{2X}\sum_{n=-N_x}^{N_x}e^{\mathrm{i}(k_m-k)x_n}\Delta x\right). \end{aligned}\tag{19}$$

標本化関数

$$S^x_{\mathrm{discrete}}(k) = \frac{1}{2X}\sum_{n=-N_x}^{N_x}e^{\mathrm{i}kx_n}\Delta x \tag{20}$$

で定義すると

$$\tilde{\varphi}(k) = \sum_{m=-M_k}^{M_k}\tilde{\varphi}(k_m)S^x_{\mathrm{discrete}}(k_m - k). \tag{21}$$

以上より x, k がともに局在化、離散化しているとすると

$$\varphi(x) = \sum_{n=-N_x}^{N_x}\varphi(x_n)S^k_{\mathrm{discrete}}(x_n - x) \tag{22}$$

$$\tilde{\varphi}(k) = \sum_{m=-M_k}^{M_k}\tilde{\varphi}(k_m)S^x_{\mathrm{discrete}}(k_m - k). \tag{23}$$

ただし、標本化関数は

$$S^x_{\mathrm{discrete}}(k) = \frac{1}{2X}\sum_{n=-N_x}^{N_x}e^{\mathrm{i}kx_n}\Delta x \tag{24}$$

$$S^k_{\mathrm{discrete}}(x) = \frac{1}{2K}\sum_{m=-M_k}^{M_k}e^{-\mathrm{i}k_m x}\Delta k. \tag{25}$$

これらは、連続極限 $\Delta x, \Delta k \to 0$ で (10) の表式と一致する。また、Fourier 変換、逆変換は

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(k_m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N_x}^{N_x} \varphi(x_n) e^{-\mathrm{i} k_m x_n} \Delta x & (26) \\
\varphi(x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-M_k}^{M_k} \tilde{\varphi}(k_m) e^{\mathrm{i} k_m x_n} \Delta k & (27)
\end{aligned}$$

となる。

$\varphi(x)$ が Nyquist の条件を満たしていないとき、K 以上の高波数成分が $k \in [-K, K]$ の Fourier 成分に折り返して誤差を生じる。これを**エイリアシング**(aliasing) という。$K'(> K)$ までの Fourier 成分を持ち、$|k| \leq K$ の Fourier 成分が $\tilde{\varphi}(k)$ と等しい関数 $\phi(x)$ を考える。Fourier 変換、逆変換は

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x'_n) e^{-\mathrm{i} k x'_n} \Delta x' & (28) \\
\phi(x'_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K'}^{K'} \tilde{\phi}(k) e^{\mathrm{i} k x'_n} \mathrm{d}k & (29)
\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、$\Delta x' = \pi/K'$, $x'_n = n\Delta x'$ であり、$\tilde{\phi}(k)$ の定義域は $k \in [-K', K']$ である。$\phi(x)$ を、($K < |k| \leq K'$ なる Fourier 成分を持つことを知らずに、) 標本間隔 $1/2\Delta x = K/2\pi$ で標本化することを考える。標本間隔 $K/2\pi$ で標本化されたデータ $\{\phi'(x_n)\}$ は

$$\phi'(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K}^{K} \tilde{\phi}'(k) e^{\mathrm{i} k x_n} \mathrm{d}k \tag{30}$$

で与えられ、Fourier 変換は

$$\tilde{\phi}'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi'(x_n) e^{-\mathrm{i} k x_n} \tag{31}$$

となる。(30)(31) の表式は φ の Fourier 変換、逆変換の表式そのものであり、(31) は $2K$ 周期関数である。$\tilde{\phi}'(k)$ の定義域が $k \in [-K', K']$ であることに注意すると

$$\tilde{\phi}'(k) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(k - 2K) & (K \leq k \leq K') \\ \tilde{\varphi}(k) & (|k| \leq K) \\ \tilde{\varphi}(k + 2K) & (-K' \leq k \leq -K). \end{cases} \tag{32}$$

$\tilde{\phi}'(k)$ を (29) の $\tilde{\phi}(k)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
\phi(x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K'}^{K'}\tilde{\phi}'(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K'}^{-K}\tilde{\phi}'(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K}\tilde{\phi}'(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{K}^{K'}\tilde{\phi}'(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2K-K'}^{K}\tilde{\phi}'(k-2K)e^{\mathrm{i}(k-2K)x_n}\mathrm{d}k+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K}\tilde{\phi}'(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k+ \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K'-2K}\tilde{\phi}'(k+2K)e^{\mathrm{i}(k+2K)x_n}\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2K-K'}^{K}(\tilde{\phi}'(k-2K)+\tilde{\phi}'(k))e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{K'-2K}^{2K-K'}\tilde{\phi}'(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k+ \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K'-2K}(\tilde{\phi}'(k)+\tilde{\phi}'(k+2K))e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$e^{\pm \mathrm{i}2Kx_n}=1$ に注意。結局 ϕ の Fourier 変換、逆変換は

$$
\tilde{\phi}'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi(x_n)e^{-\mathrm{i}kx_n}\Delta x \tag{34}
$$

$$
\phi(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K}\tilde{\phi}(k)e^{\mathrm{i}kx_n}\mathrm{d}k \tag{35}
$$

となり、$\tilde{\phi}(k)$ と $\tilde{\phi}'(k)$ の間の関係は

$$
\tilde{\phi}(k)=\begin{cases}\tilde{\phi}'(k-2K)+\tilde{\phi}'(k) & (2K-K'\le k\le K)\\ \tilde{\phi}'(k) & (|k|\le 2K-K')\\ \tilde{\phi}'(k+2K)+\tilde{\phi}'(k) & (-K\le k\le K'-2K)\end{cases} \tag{36}
$$

となる。$K<|k|\le K'$ なる Fourier 成分をもつ $\phi(x)$ を標本間隔 $K/2\pi(<K'/2\pi)$ で標本化したため、(36) のように $\tilde{\phi}(k)-\tilde{\phi}'(k)$ のエイリアス誤差が生じる。